Title	Canonical Commutation Relations and Time Operators (Spectral and Scattering Theory and Related Topics)
Author(s)	
Citation	数理解析研究所講究録別冊 = RIMS Kokyuroku Bessatsu (2010), B16: 127-133
Issue Date	2010-04
URL	http://hdl.handle.net/2433/176842
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B16 (2010), 127–133

Canonical Commutation Relations and Time Operators

By

Yasumichi MATSUZAWA*

Abstract

We consider two operators T and H which satisfy the canonical commutation relation with one degree of freedom. In the quantum mechanical context, T and H are called time operator and Hamiltonian, respectively. In this paper, we study some properties of time operatoers.

§1. はじめに

時間作用素とは、量子系の Hamiltonian と正準交換関係を満たす対称作用素のことである。時間作用素と Hamiltonian は正準交換関係を通して代数関係式を満たすため、時間作用素を解析することで系の情報を引き出すことができると期待される。実際にこの予想は正しく、系の残存確率 (survival probability) を評価したり、Hamiltonian の spectrum の情報を得ることができる。

本稿は論文 [1][3] の解説であり、時間作用素の構成法に主眼を置いた。

§2. 時間作用素と正準交換関係

先ずは時間作用素の数学的な定義を与える。H を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とする。このとき、$\mathcal{H}$ 上の対称作用素 T が H の時間作用素であるとは、正準交換関係

$$[T, H] := TH - HT = i$$

Received April 1, 2009. Revised October 19, 200x.
2000 Mathematics Subject Classification(s): 81Q10, 47N50
Key Words: time operator, canonical commutation relation
Supported by Research Fellowships of the Japan Society for the Promotion of Science for Young Scientists
*Department of Mathematics, Hokkaido University, Sapporo 060-0810, Japan.
e-mail: matsuzawa@math.sci.hokudai.ac.jp

が $\mathcal{H}$ の適当な稠密部分空間 $\mathcal{D} \neq \{0\}$ 上で成り立つときをいう。量子力学の文脈では、$\mathcal{H}$ は系の状態空間であり、H はその spectrum が系の energy を表す作用素で Hamiltonian と呼ばれる。

正準交換関係に関して、次の von Neumann の一意性定理が良く知られている：

Theorem 2.1. $\mathcal{K}$ を可分な Hilbert 空間、Q と P を $\mathcal{K}$ 上の自己共役作用素とし、Weyl 関係式

$$e^{isQ}e^{itP} = e^{-ist}e^{itP}e^{isQ}, \qquad s,t \in \mathbb{R}$$

を満たすとする。このとき、unitary 同値の意味で

$$\mathcal{K} = \bigoplus_n L^2(\mathbb{R})$$
$$Q = \bigoplus_n x$$
$$P = \bigoplus_n (-i\frac{d}{dx})$$

が成り立つ（Weyl 関係式を満たせば、$\mathrm{dom}(QP) \cap \mathrm{dom}(PQ)$ 上で正準交換関係を満たすことに注意)。

こうして、Weyl 関係式を満たす正準交換関係は unitary 同値を除いて一意であることが判る。ただし、Weyl 関係式を満たさない正準交換関係については、上の一意性は成り立たない。実際、時間作用素の理論に現れる正準交換関係の多くは、上の正準交換関係と unitary 同値ではない。

今までに良く研究された時間作用素は大きく分けて二種類ある。一つは弱 Weyl 関係式を満たすものであり、宮本 [4] によって導入された。もう一つは Galapon[2] によって提出されたものである。以下ではこの二つの時間作用素について叙述する。

§ 3. 弱 Weyl 関係式と時間作用素

時間作用素の作用素論的な approach は宮本 [4] によって着手された。宮本は弱 Weyl 関係式という代数関係に着目して時間作用素を導入した。そこで先ずは弱 Weyl 関係式を定義しよう。

Definition 3.1. T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の対称作用素、H を $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とする。このとき、(T, H) が弱 Weyl 関係式に従うとは

$$e^{itH}T = (T+t)e^{itH}, \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

が成り立つときをいう。

呼称から明らかなように、弱 Weyl 関係式は Weyl 関係式より弱い。即ち、(T, H) が Weyl 関係式を満たせば、(T, H) は弱 Weyl 関係式も満たす。しかし、この逆は一般には成り立たない。逆が成り立つのは T が自己共役のときであり、且つそのときに限る。

(T, H) が弱 Weyl 関係式に従えば、$\mathrm{dom}(TH) \cap \mathrm{dom}(HT)$ 上で正準交換関係を満たすことは容易に判る。よって、この場合、T は H の時間作用素である。これが宮本の導入した時間作用素である。かかる T の性質を見る前に、具体例を一つ挙げておく。

Example 3.2. 非相対論的な一次元自由粒子を考えよう。即ち、$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ 上で Hamiltonian $H_{\mathrm{f}} = \frac{p^2}{2m}$ を考える。ここで、$m > 0$ は質量を表す正の定数で、p は運動量作用素である。このとき、

$$T_{\mathrm{AB}} := \frac{m}{2}\overline{(p^{-1}x + xp^{-1})|_{\mathcal{F}^{-1}C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathcal{R}\setminus\{0\})}}$$

と定めれば、$(T_{\mathrm{AB}}, H_{\mathrm{f}})$ は弱 Weyl 関係式に従う。但し、$\mathcal{F}$ は $L^2(\mathbb{R})$ 上の Fourier 変換である。

T_{AB} は良く研究されている作用素で、Aharonov-Bohm 時間作用素と呼ばれている。

以下、この節では (T, H) が弱 Weyl 関係式に従うと仮定する。

Theorem 3.3. H は純粋に絶対連続である。特に H は固有値を持たない。

この定理から、調和振動子のように固有値を持つ Hamiltonian に対しては弱 Weyl 関係式を満たす時間作用素は構成できないことが判る。そのような場合は次節で扱う。

Theorem 3.4. H が下に有界ならば、T は自己共役でない。

量子系の Hamiltonian は一般に下に有界なので、T は自己共役ではない。一方、量子力学の数学的公理から、物理量は自己共役作用素で記述される。しかし、だからといって時間作用素が非物理的と結論付けることはできない。自己共役ではないが物理的に意味のある作用素は沢山存在する。実際、系の時間発展は強連続一径数 unitary 群によって与えられるし、生成・消滅作用素も自己共役ではない（対称ですらない)。要は夫々の作用素が系の dynamics とどのように関連しているかが重要なのである。弱 Weyl 関係式を満たす時間作用素に対しては次の定理がある。

Theorem 3.5. 任意の単位 vector $\psi \in \mathrm{dom}(T)$ と任意の $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ に対して

$$|\langle \psi, e^{-itH}\psi \rangle|^2 \leq \frac{4{(\Delta T)_{\psi}}^2}{t^2}$$

が成り立つ。ただし、

$$(\Delta T)_{\psi} := \|(T - \langle \psi, T\psi \rangle)\psi\|$$

である。

不等式の左辺に現れている $|\langle\psi, e^{-itH}\psi\rangle|^2$ は残存確率 (survival probability) と呼ばれている量である。上の定理は残存確率が時間作用素の分散を用いて評価できることを示している。この意味で時間作用素は系の dynamics と関連し、現象を支えている。

今まで宮本の論文に従って時間作用素の性質を概観してきたが、具体的な Hamiltonian に対して時間作用素をどのように構成するかについては全く触れていない。これは全く非自明な問題である。この問題に対して部分的な解答を与えたのが次の結果である [3]。

Theorem 3.6. (Q, P) を $\mathcal{H}$ 上の弱 Weyl 関係式を満たす組、K を $\mathbb{R}$ の閉かつ Lebesgue 測度零なる集合とする。このとき、$\mathbb{R}\backslash K$ 上の二回連続微分可能な実数値函数 f で、集合 $\{\lambda \in \mathbb{R}\backslash K : f'(\lambda) = 0\}$ が測度零となるものに対し、

$$T := \frac{1}{2}\overline{f'(P)^{-1}Q + Qf'(P)^{-1}|_{\mathcal{D}}}$$
$$H := f(P)$$

と定めれば、(T, H) は弱 Weyl 関係式を満たす。ただし、

$$\mathcal{D} := \mathrm{l.i.h.}\{g(P)\psi \in \mathcal{H} : g \in C_{\mathrm{c}}^1(\mathbb{R}\backslash K), \psi \in \mathrm{dom}(Q)\}$$

である。

$f(x) = \frac{x^2}{2m}$ の場合が Aharonov-Bohm 時間作用素である。この定理を用いれば相対論的な自由粒子に対しても時間作用素が作れる。

§4. 離散 spectrum を持つ場合

この節では、Hamiltonian が固有値を持つような場合について、時間作用素を構成し、その性質を述べる [1]。この時間作用素は Galapon[2] によってその形式的な定義が与えられたものである。

改めて $\mathcal{H}$ を無限次元複素 Hilbert 空間、H を $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とし、次の条件 (H.1) 及び (H.2) を満たすものとする：

(H.1) H は純粋に離散的な spectrum $\sigma(H) = \{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ を持ち、各固有値 E_n は単純で、$0 < E_n < E_{n+1}$ を満たす。

(H.2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{{E_n}^2} < \infty$

条件 (H.1) から、$\mathcal{H}$ の完全正規直交系 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ で、各 $n \in \mathbb{N}$ に対し、$He_n = E_n e_n$ を満たすものが存在する。以下ではこのような完全正規直交系を任意に一つ固定する。このとき、各 $n \in \mathbb{N}$ と各 $\psi \in \mathcal{H}$ に対し、

$$\sum_{\substack{m=1 \\ m\neq n}}^{\infty} \left| \frac{\langle e_m, \psi\rangle}{E_n - E_m} \right| < \infty$$

が成り立つことが判る。従って、次の作用素 $T_{\max}$ が定義できる：

$$\mathrm{dom}(T_{\max}) := \left\{ \psi \in \mathcal{H} : \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{\substack{m=1\\ m\neq n}}^{\infty} \frac{\langle e_m, \psi\rangle}{E_n - E_m} \right|^2 < \infty \right\}$$

$$T_{\max}\psi := i \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{m=1\\ m\neq n}}^{\infty} \frac{\langle e_m, \psi\rangle}{E_n - E_m} e_n, \qquad \psi \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}_{\max})$$

$\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathrm{dom}(T_{\max})$ により、$T_{\max}$ は稠密に定義されているので、その共役作用素が存在する。そこで、作用素 T を $T := {T_{\max}}^*$ で定義し、これを Galapon 時間作用素と呼ぶ。T は閉対称作用素となる。Galapon 時間作用素 T が H と正準交換関係を満たすことを述べる前に、部分空間

$$\mathcal{D}_{\mathrm{c}} := \mathrm{l.i.h.}\{e_n - e_m : n, m \in \mathbb{N}\}$$

が $\mathcal{H}$ で稠密であることを注意しておく。

Theorem 4.1. 包含関係

$$\mathcal{D}_{\mathrm{c}} \subset \mathrm{dom}(TH) \cap \mathrm{dom}(HT)$$

と正準交換関係

$$(TH - HT)\psi = i\psi, \qquad \psi \in \mathcal{D}_{\mathrm{c}}$$

が成り立つ。

従って、T は H の時間作用素であり、Galapon 時間作用素という呼称とも共立的である。

以下では T の満たす性質について述べる。先ず spectrum に関しては次の命題が成り立つ。

Proposition 4.2. T が自己共役であれば、T の spectrum は原点に関して対称な $\mathbb{R}$ の閉部分集合である。T が自己共役でなければ、T の spectrum は $\mathbb{C}$ 全体である。

Proof. 共役子 J を

$$J\psi := \sum_{n=1}^{\infty} \langle \psi, e_n\rangle e_n, \qquad \psi \in \mathcal{H}$$

と定めると、任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して、

$$J(T - z)J = -(T + z^*)$$

が成り立つ。よって、$z \in \sigma(T)$ である為の必要十分条件は、$-z^* \in \sigma(T)$ である。これと、自己共役でない閉対称作用素の spectrum は $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$、$\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) \leq 0\}$、$\mathbb{C}$ のいずれかに限ることを用いれば題意が従う。 □ □

弱 Weyl 関係式を満たす時間作用素とは異なり、Galapon 時間作用素は自己共役にもなり得る。しかし、直接自己共役性を示すのは難しく、有界性を示すことで間接的に示されることが多い。

Theorem 4.3. ある定数 $\alpha > 1$、$C > 0$、$a > 0$ が存在し、

$$E_n - E_m \geq C(n^\alpha - m^\alpha), \qquad n > m > a$$

を満たすとする。このとき、T は有界である。

上の定理で $\alpha = 1$ まで伸びない理由は、Riemann ζ 函数 $\zeta(s)$ が $s = 1$ で極を持つことによる。では別の形で $\alpha = 1$ に相当する定理があるだろうか。この問に対しては肯定的に答えることができる。

Theorem 4.4. ある定数 $\lambda > 0$、$\mu \in \mathbb{R}$、$a > 0$ が存在し、

$$E_n = \lambda n + \mu, \qquad n > a$$

を満たすとする。このとき、T は有界である。

Example 4.5. 量子調和振動子を考えよう。即ち、Hilbert 空間 $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ 上で Hamiltonian $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2$ を考える。ただし、p は運動量作用素で、$m > 0$ と $\omega > 0$ は定数である。このとき、H は自己共役であり、$\sigma(H) = \sigma_p(H) = \{(n + \frac{1}{2})\omega\}_{n=0}^{\infty}$ かつ、各固有値は単純であることが知られている。また、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2} < \infty$ だから、H に対する Galapon 時間作用素 T を考えることができる。定理 4.4 から T は有界なので、

$$T\psi = \frac{i}{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq n}}^{\infty} \frac{\langle e_m, \psi \rangle}{n - m} e_n, \qquad \psi \in \mathcal{H}$$

となる。よって、T は純粋に絶対連続であり、$\sigma(T) = [-\frac{\pi}{\omega}, \frac{\pi}{\omega}]$ となる。実際、ωT は Hardy 空間 $H^2(\mathbb{T})$ 上の、函数 $\mathbb{T} \ni e^{i\theta} \longmapsto \theta \in [-\pi, \pi]$ に関する Toeplitz 作用素と自然に unitary 同値になる。ここで、個数作用素 $\hat{N} := \frac{1}{\omega}H - \frac{1}{2}$ と作用素 $\hat{\theta} := \omega T$ を考える。$\hat{\theta}$ は $\hat{N}$ に対する Galapon 時間作用素になっていることに注意しよう。故に、正準交換関係を満たす：

$$\hat{\theta}\hat{N}\psi - \hat{N}\hat{\theta}x = i\psi, \qquad \psi \in \mathcal{D}_c$$

また、$\hat{\theta}$ は純粋に絶対連続で、$\sigma(\hat{\theta}) = [-\pi, \pi]$ となることも判る。$\hat{\theta}$ は位相作用素と呼ばれている対象であり、その spectrum が角度に対応していることが判る。

Galapon 時間作用素はより強く、完全連続にもなり得る。

Proposition 4.6. ある定数 $\alpha > \frac{3}{2}$、$C > 0$、$a > 0$ が存在し、

$$E_n - E_m \geq C(n^\alpha - m^\alpha), \qquad n > m > a$$

を満たすとする。このとき、T は Hilbert-Schmidt 類である。

この結果から、T も H も離散的な spectrum を持つような正準共役な組が存在することが判る。

謝辞

最後になりますが、有益な助言を与えてくださった査読者の方に感謝いたします。

References

[1] A. Arai and Y. Matsuzawa, Time Operators of a Hamiltonian with Purely Discrete Spectrum, *Rev. Math. Phys.* **20** (2008), 951-978

[2] E. A. Galapon, Self-adjoint time operator is the rule for discrete semi-bounded Hamiltonians, *Proc. R. Soc. Lond. A* **458** (2002), 2671–2689.

[3] F. Hiroshima, S. Kuribayashi and Y. Matsuzawa, Strong Time Operators Associated with Generalized Hamiltonians, *Lett. Math. Phys.* **87** (2009), 115-123

[4] M. Miyamoto, A generalized Weyl relation approach to the time operator and its connection to the survival probability, *J. Math. Phys.* **42** (2001), 1038–1052.